

对鼓的振动模态的研究报告

李铭乐洋，欧阳达晟，孙培轩，周圣杰，朱汶宣

2025 年 5 月 17 日

摘要

本研究基于《音乐与数学》课程中对弦振动模态的认知，进一步探讨了鼓面的二维振动问题。首先，通过分析鼓膜对应的二维振动方程，推导出其一般解，并讨论了鼓的振动模态特征，揭示了其与弦振动在数学描述上的异同。其次，以定音鼓（timpani）为例，研究了其发声机理，结合边界条件与频率特性，阐明了定音鼓能够产生固定音高的物理与数学原因。最后，对比分析了固定音高乐器与无固定音高乐器的本质区别，为理解乐器的声学特性提供了理论支持。

关键词：鼓的振动；二维振动方程；振动模态；定音鼓

目录

1 鼓的振动模态	3
1.1 受力分析	3
1.2 方程求解	4
1.3 边界条件	5
1.4 结论	5
2 定音鼓的发声机理	6
2.1 同心模态和径向模态	6
2.2 空气负载	6
3 固定音高乐器和无固定音高乐器的本质区别	9
3.1 定音鼓和其他鼓的对比	9
3.2 固定音高乐器和无固定音高乐器的区别	11
4 参考资料	12
A 对 (1) 式坐标转换的详细推导	13
B (2) 式左侧为负常数的证明	15
C 使用 COMSOL 进行仿真的细节	16
C.1 鼓的建模	16
C.2 空气建模	16
C.3 无鼓桶	16
C.4 无鼓桶的各振动模态对应的形状	16
C.5 有鼓桶	17

1 鼓的振动模态

1.1 受力分析

设鼓皮是一个面密度为 ρ (单位 kg/m^2), 表面张力为 T (单位 N/m) 的薄膜。

考虑膜上一小块区域 $[x_0, x_0 + \Delta x] \times [y_0, y_0 + \Delta y]$, 设其高度为 $z_0 = z(x_0, y_0, t)$ 。该区域收到四个张力, 分别来自区域的四个边界。

沿 x 方向的两个张力大小都为 $T\Delta y$, 设沿 x 方向的切线角度在 x_0 处为 α , 在 $x_0 + \Delta x$ 处为 β , 即

$$\tan \alpha = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0}, \tan \beta = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0+\Delta x}$$

则这两个力的竖直分量分别为

$$-T\Delta y \sin \alpha \approx -T\Delta y \tan \alpha = -T\Delta y \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0} \right)$$

和

$$T\Delta y \sin \beta \approx T\Delta y \tan \beta = T\Delta y \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0+\Delta x} \right)$$

两者合力为

$$T\Delta y \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0+\Delta x} - \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0} \right) \approx T\Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

同理与 y 同向的两个张力的竖直方向上的合力为

$$T\Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

该区域质量为 $\rho\Delta x\Delta y$, 由牛顿第二定律得方程

$$T\Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \rho\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

两侧约掉 $\Delta x\Delta y$, 设 $c = \sqrt{T/\rho}$, 化简为

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1)$$

由于薄膜为圆形，将上式转移到极坐标下¹，有

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

1.2 方程求解

使用分离变量法，设 $z = f(r)g(\theta)h(t)$ ，有

$$c^2 \left(f''(r)g(\theta)h(t) + \frac{1}{r} f'(r)g(\theta)h(t) + \frac{1}{r^2} f(r)g''(\theta)h(t) \right) = f(r)g(\theta)h''(t)$$

两侧同除以 z 得

$$c^2 \left(\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{f'(r)}{rf(r)} + \frac{g''(\theta)}{r^2 g(\theta)} \right) = \frac{h''(t)}{h(t)} \quad (2)$$

左侧只与 r, θ 有关，右侧只与 t 有关，故两侧都等于一个常数。可以证明左侧若等于一个常数，则必为负常数²，设为 $-\omega^2$ 。

故

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = -\omega^2$$

解得 $h(t) = C \sin(\omega t + \phi)$ ， C 为任意常数，下同。

对 LHS = $-\omega^2$ 同乘 r^2/c^2 ，再进行移项得

$$r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)} + r^2 \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$$

同样，左右与不同的变量有关，等于一个常数。由于右侧是以 2π 为周期的函数，故只能等于一个平方数，设为 n^2 。

则

¹详细的坐标转换推导见[附录 A](#)。

²证明见[附录 B](#)。

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -n^2$$

解得 $g(\theta) = C \sin(n\theta + \psi)$ 。

最后剩下关于 f 的方程

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) = 0$$

此为 Bessel 方程³，其解为贝塞尔函数 $J_n(\omega r/c)$ 与诺依曼函数 $Y_n(\omega r/c)$ ，但后者 $\xrightarrow{r \rightarrow 0} -\infty$ ，故物理上只能有 $f(r) = C J_n(\omega r/c)$ 。

综上所述， $z = C J_n(\omega r/c) \sin(\omega t + \phi) \sin(n\theta + \psi)$ 及它们的线性组合为原方程的解。

1.3 边界条件

设膜的半径为 a ，则 $r = a$ 时应有 $z = 0$ ，对任意 θ 和 t 。故 $J_n(\omega a/c) = 0$ ，由于 J_n 只有可列个零点， ω 的取值也是可列的，设 $\omega a/c$ 为 J_n 的第 k 个零点。

1.4 结论

不同的 n, k 对应一个膜的振动模态，设其频率为 $f_{n,k}$ ，注意对于同一个膜， $f_{n,k}/f_{0,1}$ 的值只与 n, k 有关。

下表列出了 $n \leq 4, k \leq 3$ 的所有 $f_{n,k}/f_{0,1}$ 的值。

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$k = 1$	1.0000	1.5933	2.1355	2.6531	3.1555
$k = 2$	2.2954	2.9173	3.5001	4.0589	4.6010
$k = 3$	3.5985	4.2304	4.8319	5.4121	5.9765

表 1: $n \leq 4, k \leq 3$ 的所有 $f_{n,k}/f_{0,1}$ 的值。

³https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

2 定音鼓的发声机理

2.1 同心模态和径向模态

如上所述，鼓的振动模态拆分为径向模态（Diametric Modes）和同心模态（Concentric Modes）的组合，即由 n, k 所决定。下面分别研究同心模态和径向模态。

首先是同心模态。一个简单但又重要的事实是，鼓手在敲击定音鼓的时候并非在中心敲击，而是在位于距离边缘到中心的约 $1/4$ 的地方敲击，所以同心模态的影响较小。但是同心模态就算因为错误的击打而产生了较大的初始能量，之后也会快速衰减，不会对固定音高产生影响。

在 [4] 中，记载了有关不同模态在击打后 0.03s 以及 1s 不同振动模态的振幅。我们观察到，正常击打的时候，同心模态振动的能量很小，几乎可以忽略。而若在正中央击打，则同心模态在击打后 0.03s 能量较大，但是 1s 后能量快速衰减，得到的结果与正常击打时的结果更加相似。而相比之下，径向模态（ $n = 1, k \geq 1$ 的模态）的能量衰减明显少于同心模态。

然后我们关注一个未被讨论的特例，即 $n = 1, k = 0$ 的振动模态。这个振动模态中，整个鼓皮一起上下振动。这个模态和同心模态类似，也因为鼓手敲击位置以及空气负载的减震，导致了衰减速度变快，并不会对定音鼓的固定音高产生影响。不论是人耳听到的声音，还是通过频率分析得到的结果，这个振动模态几乎都会被忽略。

通过这个分析，我们知道了对于定音鼓来说，真正影响其固定音高的是径向模态，即 $(1, 1), (2, 1), \dots, (k, 1)$ 。

2.2 空气负载

定音鼓相比于普通的鼓，其最大特点是有固定音高。而使得定音鼓有固定音高的主要物理现象是空气负载（Air Loading）。

由于定音鼓的膜的面积较大，所以在鼓手敲击定音鼓的时候，鼓内外的空气会对鼓皮的震动产生不可忽略的影响。

一方面，当膜产生振动的时候，膜表面的运动使得相邻空间的空气产生了加速度。而由于惯性的影响，这个加速度会阻碍膜的振动。换句话说，振动时的发

生变化的物体的质量不仅要考虑膜，还要考虑膜附近的空气，于是该振动系统可以理解成一个增加了空气质量的复合系统。由于系统的质量增加，所以所以空气负荷使得振动频率下降。这个振动的影响对于不同模态是不一样的，对 (1, 1) 和 (2, 1) 的影响尤为强烈。

与前面得到的理想情况不同的是，空气负载的影响依赖于膜的各种参数。这就是定音鼓与其他鼓的一大区别：定音鼓的膜的参数使得在算上空气负载后，径向模态的频率比接近于 $1 : 1.5 : 2 : \dots$ 。

我们使用 COMSOL 的压力声学结构与结构力学模块进行了仿真，并收集到了如下的数据⁴。

模态 (n, k)	频率 (Hz)	比值 ($/f_{11}$)
(0, 1)	91.23	0.54
(1, 1)	168.37	1.00
(2, 1)	243.05	1.44
(0, 2)	265.28	1.57
(3, 1)	316.82	1.88
(1, 2)	355.43	2.11
(4, 1)	391.86	2.32
(2, 2)	448.66	2.66

表 2: 8 个振动模态以及仿真得到的频率 (Without Kettle)

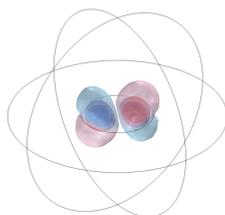


图 1: 振动模态 (1, 1) 对应的形状；其他振动模态对应的形状见[附录 C.4](#)

观察模态 (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1) 对应的比值，分别是 1.00, 1.44, 1.88, 2.32。这个数据距离真实的 $1 : 1.5 : 2 : 2.5$ 仍有差距，因为我们忽略了定音鼓的 Kettle

⁴仿真的细节见[附录 C](#)。

的影响。但是已经足够好，没有鼓壳的定音鼓在历史上也被申请过专利^[5]。

有了 Kettle 后，鼓内封闭的内部空气体积的振动模式的频率高于与其耦合的膜模式的频率^[6]，这对膜的振动产生影响。经实验得到， $n = 0$ 的模态频率上升，而其余模态频率下降。

以下是加上 Kettle 之后得到的数据。

模态 (n, k)	频率 (Hz)	比值 ($/f_{11}$)
(0, 1)	129.18	0.83
(1, 1)	154.03	1.00
(2, 1)	232.99	1.51
(0, 2)	259.93	1.69
(3, 1)	309.92	2.01
(1, 2)	359.25	2.33
(4, 1)	389.09	2.52
(2, 2)	432.25	2.80

表 3: 8 个振动模态以及仿真得到的频率 (With Kettle)

经过这样的变化后，径向模态的频率达到了 $1 : 1.51 : 2.01$ ，更加接近 $1 : 1.5 : 2$ 。

另一方面，空气分子的运动产生速度梯度，空气的黏性导致振动的能量转化为热能，导致振动系统的能量快速衰减。对于频率越高的模态，空气黏性导致的衰减越显著。相关实验表明 (1, 1), (2, 1), (3, 1) 在 1s 之后变化不大，但是 (4, 1) 和 (5, 1) 则在 1s 后快速衰减^[7]。所以前三个径向模态的和谐足以产生一个固定音高。

值得注意的一点是，理论上存在 Missing Fundamental 的现象，即在听到其泛音列时，人耳会自动听到其 Fundamental，即弥补出 Fundamental 的缺失。而由于 $f_{1,1} : f_{2,1} : f_{3,1} = 1 : 1.5 : 2$ (后续将展示为何是这样的比例)，所以根据这个理论，人耳将听出比 $f_{1,1}$ 低八度的音。但是实际上，更加高频的模态衰减速度过快且能量较小，所以不支持产生这样的现象。

最后所以最终定音鼓产生的固定音高即为 (1, 1) 振动模态所对应的频率。

3 固定音高乐和器无固定音高乐器的本质区别

3.1 定音鼓和其他鼓的对比

我们下载了一段定音鼓的声音⁵，并对其中一个衰减过后的音进行频率分析，得到了如下的结果：

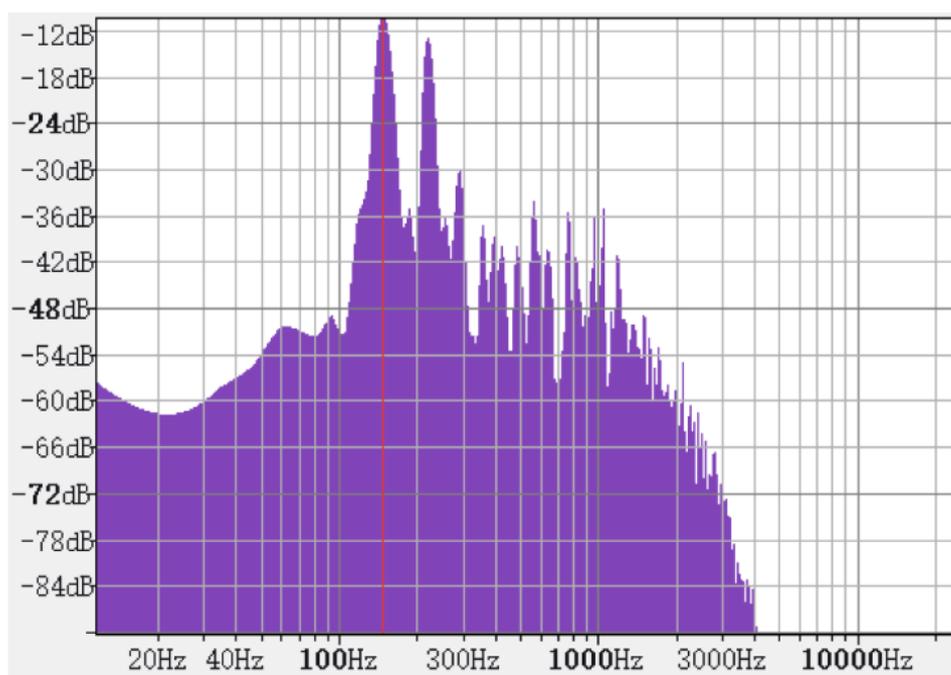


图 2: 对定音鼓声音进行频率分析的结果

最高的峰波为 -10dB ，而 $> -30\text{dB}$ 的波峰在 148Hz (D3)， 220Hz (A3)， 290Hz (D4)，比例为 $1 : 1.48 : 1.95$ ，而其余的波峰都显著低于这三个波峰。考虑到录音等造成的误差，这是一个相当令人满意且符合前面得到的结论的结果。

⁵[What does the timpani sound like? \(Scale\) @UtahSymphonyUtahOpera](#)

我们也下载了一段军鼓的声音⁶，并对其中一个衰减过后的音进行频率分析，得到了如下的结果：

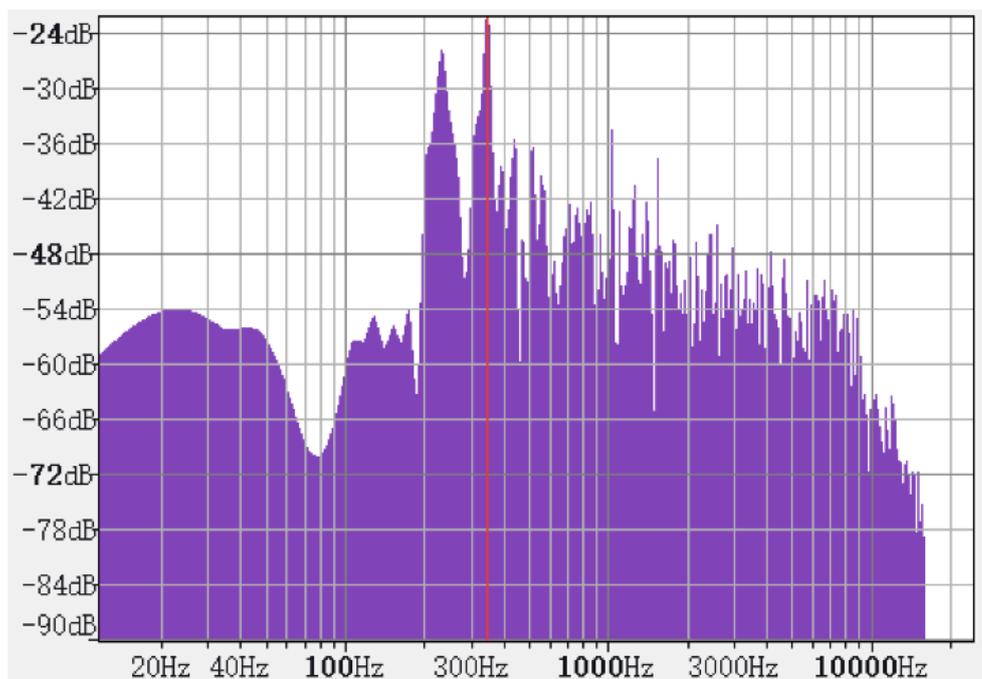


图 3: 对军鼓声音进行频率分析的结果

最高的峰波为 20Hz ，而其中 $\geq -36\text{dB}$ 的峰波就有： 231Hz (A#3)， 345Hz (F4)， 439Hz (A4)， 512Hz (C5)， 1018Hz (C6)。许多模态的能量仍然较高，无法形成一个和谐的泛音列。

⁶[Snare Drum Samples @TheDrumwerks](#)

我们还下载了一段底鼓的声音⁷，并对其中一个衰减过后的音进行频率分析，得到了如下的结果：

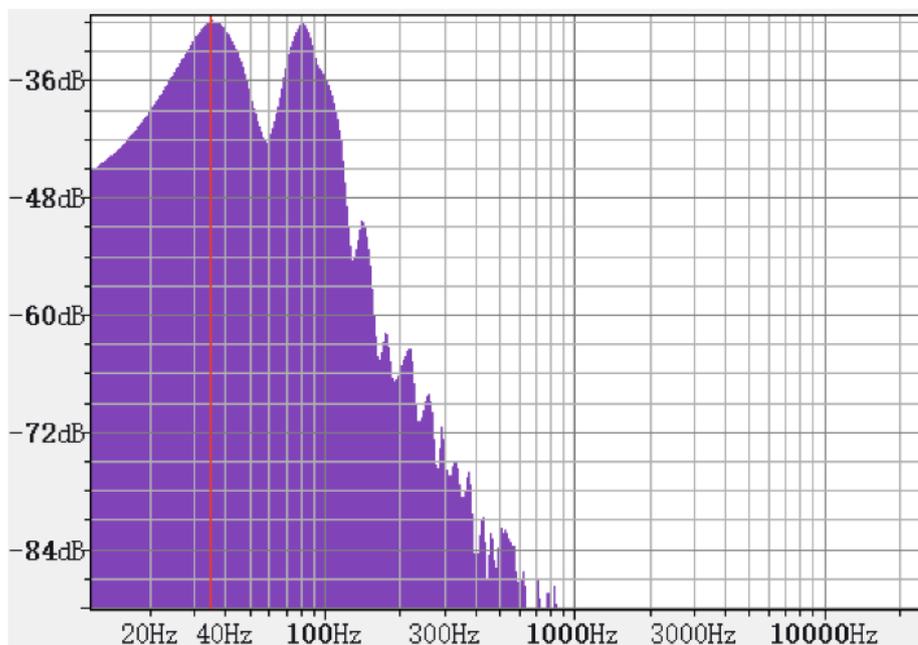


图 4: 对底鼓声音进行频率分析的结果

容易发现能量较大的几个峰波在 35Hz, 80Hz, 140Hz。剩下的模态衰减后能量确实很小，但是 1 : 2.3 : 4 的比例也无法形成和谐的泛音列。

对比以上三个结果，这一方面证实了上面所说，定音鼓能够产生固定音高，一方面得益于非径向模态的快速衰减，一方面得益于空气负载产生的频率改变。

另一方面，能量较高的模态是否产生比例和谐的泛音列则是能否产生固定音高的关键。

3.2 固定音高乐器和无固定音高乐器的区别

从上面，我们可以发现有音高的乐器的最重要特点是其泛音列频率为某个基频的整数倍。注意这里基频不一定真实在频谱上可被观测到（例如定音鼓，以及 Missing Fundamental 现象）。

⁷[KICK DRUM SOUND EFFECT \[HD\] @nBeatsofficial](#)

这里本质上是因为将所有振动模态叠加之后，由于泛音列的频率为基频的整数倍，所以其振动大致上满足了一种以基频为周期的周期性。这种周期性让我们能够感知到其音高。

而对于无音高乐器，例如军鼓，其振动模态非常多，较为混乱，无法形成一个固定周期；例如底鼓，其 1 : 2.3 的频率比并非整数倍数关系，人耳也就无法形成一个可感知的基频。

综上所述，音高本质上是人耳对形成固定周期的基频的感知，而乐器是否有固定音高本质上是其所有振动模态叠加起来是否能够产生一个固定的周期。

4 参考资料

- [1] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] David J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3] Gareth Loy, *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music, Vol. I*, The MIT Press, Cambridge, 2006.
- [4] Thomas D. Rossing. "Science of Percussion Instruments", 2000, ISBN 981-02-4158-5
- [5] Montagu, Jeremy. *Timpani and Percussion*. Yale University Press. May 2002
- [6] Thomas D. Rossing. "The physics of kettledrums." *Scientific American* 247/16 (November 1982): 172-178.
- [7] Acoustic Analysis of Timpani: Specific Mode by Striking Point, Yuya Nishimura & Sohei Nishimura. URL: <https://www.ijeert.ijrsset.org/pdf/v3-i10/7.pdf>

A (1) 式坐标转换的详细推导

转移到极坐标下即使用换元 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则有

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

与

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

如此再求一阶导数, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) - r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) - r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
&= -r \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) - r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) - r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \\
&= -2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}
\end{aligned}$$

因此直接计算得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

B (2) 式左侧为负常数的证明

令 $l(r, \theta) = f(r)g(\theta)$, 则方程左式可写成

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 l}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial l}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} \right) / l$$

这里的

$$\frac{\partial^2 l}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial l}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}$$

实际上就是拉普拉斯算子的极坐标形式, 记作 $\nabla^2 l$ 。

则

$$c^2 \frac{\nabla^2 l}{l}$$

等于某常数说明 l 为 ∇^2 的特征函数, 该常数除以 c^2 为 ∇^2 的特征值。

由于 ∇^2 的特征值均非正, 故该式只能等于一个非正常数 $-\omega^2$ 。

C 使用 COMSOL 进行仿真的细节

我们使用了 COMSOL 的压力声学与结构力学模块进行仿真。

C.1 鼓的建模

鼓皮为半径为 $r = 0.328\text{m}$ ，厚度 $thic = 1.9 \times 10^{-4}\text{m}$ ，表面张力 $T = 3990\text{N}$ 的 Mylar 膜，其密度 $\rho = 1.38 \times 10^3\text{m}^3$ ，杨氏模量 $3.5 \times 10^9\text{N/m}^2$ ，泊松比 0.38。

鼓桶为体积为 $V = 0.14\text{m}^3$ 的圆柱，以鼓皮为顶，其余面为刚体。

数值参考自 [1] 与网络上搜索到的数据⁸。

C.2 空气建模

空气密度 $\rho_a = 1.18\text{kg/m}^3$ ，声速 $c_a = 340\text{m/s}$ 。

外部空气域为以鼓皮为中心的半径 $6r$ 的球体，添加了球面波辐射以减少其表面的反射。

内部空气域为鼓桶内部。

C.3 无鼓桶

删去了鼓桶与内部空气域，从 90Hz 开始计算了频率前 60 小的特征频率，并人工筛掉空气域的模态得到结果，如表 2 所示。

C.4 无鼓桶的各振动模态对应的形状

以下八张图是无鼓桶的各振动模态对应的形状。

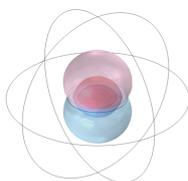


图 5: 模态 (0,1) 对应的形状

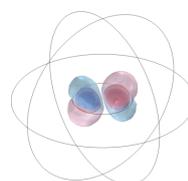


图 6: 模态 (1,1) 对应的形状

⁸[Mylar a Fysikaaliset Ominaisuudet](#), 参考了其中泊松比的数值。

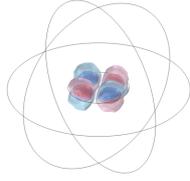


图 7: 模态 (2,1) 对应的形状



图 8: 模态 (0,2) 对应的形状

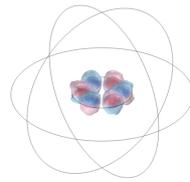


图 9: 模态 (3,1) 对应的形状

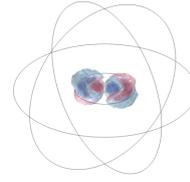


图 10: 模态 (1,2) 对应的形状

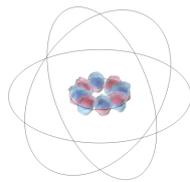


图 11: 模态 (4,1) 对应的形状

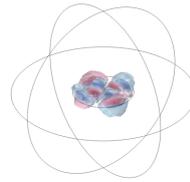


图 12: 模态 (2,2) 对应的形状

C.5 有鼓桶

从 120Hz 开始计算了频率前 240 小的特征频率，并人工筛掉空气域的模态得到结果，如表 3 所示。